# ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

## Διάλεξη 18η

## 10/05/18

## Επαναληπτικές ασκήσεις:

**Άσκηση 3.10) (Βιβλίου)**

$X_1, \dots, X_n$ τ.δ από $N(0,1)$

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k}\sum_{i}^{k} X_i \quad , \quad \bar{X}_{n-k} = \frac{1}{n-k}\sum_{k+1}^{n} X_i$$

i) $\dfrac{\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k}}{2} \sim ;$

ii) $k\bar{X}_k^2 + (n-k)\bar{X}_{n-k}^2 \sim ;$

iii) $\dfrac{X_1^2}{X_2^2} \sim ;$

**Λύση**

i) $$\frac{1}{2}(\bar{X}_k + \bar{X}_{n-k}) \sim N\left(\frac{1}{2}(0+0), \frac{1}{4}\left[Var(\bar{X}_k) + Var(\bar{X}_{n-k})\right]\right) \equiv$$

$$\equiv N\left(0, \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right)\right) \equiv N\left(0, \frac{n}{4k(n-k)}\right)$$

ii) Για να βρω τι κατανομή έχει όλη αυτή η παράσταση, θα πρέπει να βρω τι κατανομή έχει το καθένα από τα $\bar{X}_k$ και $\bar{X}_{n-k}$.

$$\bar{X}_k \sim N\left(0, \frac{1}{k}\right) \rightsquigarrow \frac{\bar{X}_k - 0}{1/\sqrt{k}} \sim N(0,1) \rightsquigarrow k\bar{X}_k^2 \sim X_1^2 \quad \text{και}$$

$$(n-k)\bar{X}_{n-k}^2 \sim X_1^2 \quad \text{άρα} \quad k\bar{X}_k^2 + (n-k)\bar{X}_{n-k}^2 \sim X_2^2$$

iii) $\dfrac{X_1^2}{X_2^2} = \dfrac{\frac{X_1^2}{1}}{\frac{X_2^2}{1}} \equiv \dfrac{X_1^2/1}{X_2^2/1} \sim F_{1,1}.$

**Άσκηση 3 από τις επαναληπτικές του βιβλίου (σελ 311)**

$X_1, \dots, X_6$ τ.δ $N(0,1)$

$Z_1 = \dfrac{X_1+X_2}{2}$, $Z_2 = \dfrac{X_3+\dots+X_6}{4}$, $Z_3 = \dfrac{\sqrt{2}(X_1-X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}}$,

$$Z_4 = \frac{[(X_1-X_6)^2+(X_2-X_5)^2+(X_3-X_4)^2]}{2}$$

α) i) $\dfrac{Z_1+Z_2}{2} \sim ;$ ii) $2Z_1^2+4Z_2^2 \sim ;$ iii) $X_3 - Z_2 \sim ;$

iv) $Z_4 \sim ;$

β) i) $P(Z_3 \geq -c_1) = 0{,}99$

ii) $P(Z_4 \leq c_2) = 0.99$

Λύση

α) i) $Z_1 = \dfrac{X_1+X_2}{2} \sim N(0, \frac{1}{4}(1+1)) = N(0, \frac{1}{2}) \equiv \dots \equiv N(0, \frac{3}{16})$

$Z_2 = \dfrac{X_3+\dots+X_6}{4} \sim N(0, \frac{1}{16}(1+1+1+1)) \equiv N(0, \frac{1}{4})$

Άρα $\dfrac{Z_1+Z_2}{2} \sim N(0, \frac{1}{4}(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}))$

ii) $2Z_1^2 + 4Z_2^2 \sim \chi_2^2$

$Z_1 \sim N(0, \frac{1}{2}) \rightsquigarrow \frac{Z_1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} \sim N(0,1)$

$Z_2 \sim N(0, \frac{1}{4}) \rightsquigarrow \frac{Z_2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} \sim N(0,1)$

iii) $X_3 - Z_2 = X_3 - \frac{X_3 + \dots + X_6}{4} = X_3 - \frac{X_3}{4} - \frac{X_4 + X_5 + X_6}{4} =$

$$= \frac{3X_3}{4} - \frac{X_4 + X_5 + X_6}{4} \sim N\Big(\underbrace{\frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{0}{4}}_{0}, \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 (1+1+1)}_{\frac{12}{16}}\Big)$$

iv) $Z_4 = \frac{[(X_1 - X_6)^2 + (X_2 - X_5)^2 + (X_3 - X_4)^2]}{2} \sim \chi_3^2$

$X_1 - X_6 \sim N(0,2) \rightsquigarrow \frac{X_1 - X_6}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\frac{X_2 - X_5}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

$\frac{X_3 - X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

B) i)

Αρχικά πρέπει να βρούμε και την κατανομή του $Z_3$, αλλιώς δεν μπορώ να συνεχίσω.

$$Z_3 = \frac{\sqrt{2}(X_1-X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}} \sim ;$$

$\hookrightarrow X_1-X_2 \sim N(0,2) \Rightarrow \frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

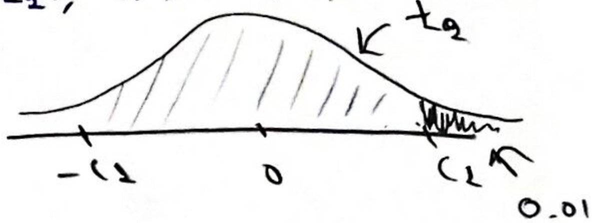
$\frac{X_3-X_4}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ , $\frac{X_5-X_6}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$

Έτσι
$$Z_3 = \frac{\sqrt{2}(X_1-X_2)}{\sqrt{(X_3-X_4)^2+(X_5-X_6)^2}} = \frac{\overbrace{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}}}^{N(0,1)}}{\sqrt{\underbrace{\frac{\frac{(X_3-X_4)^2}{2}+\frac{(X_5-X_6)^2}{2}}{2}}_{\chi^2_2/2}}} \underset{(\text{ορισμός})}{\sim} t_2$$

Έτσι $P(Z_3 \geq -c_1) = 0,99 \Rightarrow P(t_2 \geq -c_1) = 0,99$

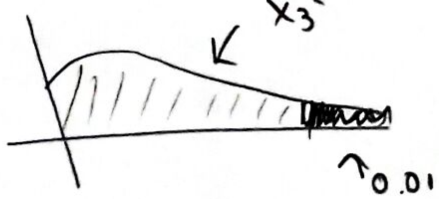
$\Rightarrow P(t_2 \geq c_1) = 0,01$

Έτσι έχω $c_1 = t_{2,0.01} = 6.965$




ii) $P(Z_4 \leq c_2) = 0.99 \Rightarrow$

$P(\chi^2_3 \leq c_2) = 0.99 \Rightarrow$




$c_2 = \chi^2_{3,0.01} = 11.345$

Άσκηση 4.1. (Βιβλίο)

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_{n_1}) \sim N(\mu_x, \sigma^2)$

$\underset{\sim}{Y} = (Y_1, \dots, Y_{n_2}) \sim N(\mu_y, \sigma^2)$

ΝΔΟ: $\forall\, \omega \in [0,1]$ η σ.σ $U = U(X, Y) = \omega S_x^2 + (1-\omega) S_y^2$

Είναι αμερόληπτη εκτός του $\sigma^2$.

$E(S^2) = \sigma^2$, άρα $E(U) = \omega E(S_x^2) + (1-\omega) E(S_y^2)$

$= \omega\sigma^2 + (1-\omega)\sigma^2 = \sigma^2$.

$Var(U) = \omega^2 Var S_x^2 + (1-\omega)^2 Var S_y^2 = \omega^2 \dfrac{2\sigma^4}{n_1 - 1} + (1-\omega)^2 \dfrac{2\sigma^4}{n_2-1}$. //

$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \rightsquigarrow Var\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1)$ // για ποια τιμή του $\omega$ έχουμε ητη;

$$g(\omega) = \frac{2\sigma^4}{(n_1-1)(n_2-1)} \Big[\underbrace{(n_1+n_2-2)\omega^2 - 2(n_1-1)\omega + n_2 - 1}_{f(\omega)}\Big]$$

$f'(\omega) = 2\omega(n_1+n_2-2) - 2(n_1-1) = 0 \rightsquigarrow \omega = \dfrac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$ και

$1 - \omega = \dfrac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$.

$f''(\omega) = 2(n_1+n_2-2) > 0$ άρα min. και:

$U = \dfrac{(n_1-1)S_x^2}{n_1+n_2-2} + \dfrac{(n_2-1)S_y^2}{n_1+n_2-2} = S_p^2 \leftarrow \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$

Άσκηση 17 από τις επαναληπτικές, σελ 314)

Μέσος χρόνος 10 λεπτά.

$n=16$ $\sim N(\mu,\sigma^2)$

6, 7, 8, 9, 10, 8, 11, 7, 6, 5, 10, 5, 11, 9, 10, 6.

i) γρηγορότεροι; ($\alpha=0.05$, και 95% δ.ε. για το $\mu$)

ii) $\sigma^2=9$, η (i) και ισχύς για $H_0: \mu=9$

Λύση

i) $H_0: \mu \geq 10$ η $H_a: \mu < 10$,

$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$ || $t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-1}$ και

$\mu = 10$, $\bar{x} = 8$

$n=16$, $s^2 = 4.26$ ($s = 2.064$)

|| $t \leq -t_{\alpha,n-1}$ ($\equiv t_{0.05,15} = -1.753$)

Είναι $t = \frac{8-10}{2.064/\sqrt{16}} = -3.88$ και επειδή

$-3.88 < -1.753$, απορρ η $H_0$

ii) $H_0: \mu \geq 10$ v $H_a: \mu < 10$, $Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ ($\overset{H_0}{\sim} N(0,1)$) και $Z \leq -z_\alpha$ ($= -z_{0.05} = -1.645$)

$Z = \frac{8-10}{3/\sqrt{16}} = -2.67$ και $-2.67 < -1.645$, απορρ $H_0$

$\gamma = 1-\beta$ $\begin{cases} \alpha = \text{απορρ την υπόθεση ενώ ισχύει το μηδεν.} \\ \beta = \text{δεχόμαι την υπόθεση ενώ ισχύει η εναλλακτική.} \end{cases}$

$\beta = P(\text{acc } H_0 \mid H_0 \text{ false} = \text{in } H_a)$

$= P\left( Z \left(\frac{\bar{x}-100}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq -Z_\alpha \,\middle\|\, \mu = 9 \right)$

$\beta = P\left( \frac{\bar{x}-100}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -1.645 \,\middle\|\, \mu = 9 \right) = P$

$= P\left( \frac{\bar{x}-10+1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -1.645 + \frac{1}{3\sqrt{16}} \,\middle\|\, Z_1 \sim N(0,1) \right)$

$= P\left( Z > -0.319 \,\|\, Z_1 \sim N(0,1) \right) = 0.5 + 0.1995$

$= 0.6995$ ~~001~~

$\boxed{\gamma = 0.3775}$